MATHEMATICS

UNE REMARQUE SUR LA STRUCTURE DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES COMPLEXES

PAR

J. TITS

(Communicated by Prof. H. FREUDENTHAL at the meeting of October 31, 1959)

1. Soient L une algèbre de Lie sur un corps K, et M, U deux sous-espaces vectoriels de L jouissant des propriétés suivantes:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} L=M+U, \quad M\cap U=\{O\}, \quad [M,M]\subseteq M,\\ [M,U]\subseteq U, \quad [U,U]\subseteq M. \end{cases}$$

M est une sous-algèbre de L et pour tout $a\in M$ on a ad a $(U)\subseteq U$. Si nous désignons par $E(U)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de l'espace vectoriel U, et par $\varrho(a)=\mathrm{ad}_U\, a$ l'endomorphisme de U induit par $\mathrm{ad}\, a$, $\varrho=\mathrm{ad}_U : M\to E(U)$ est une représentation linéaire de M. D'autre part, pour tout couple $u_1,\ u_2\in U$, la fonction $\pi : U\times U\to M$ définie par $\pi(u_1, u_2)=[u_1, u_2]$ est une fonction bilinéaire sur U, à valeurs dans M, et satisfaisant aux relations suivantes, conséquences de l'identité de Jacobi dans L:

$$(1.2)\qquad \pi(u_1, u_2)+\pi(u_2, u_1)=0 \qquad (u_1, u_2\in U),$$

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \varrho(\pi(u_1, u_2))(u_3)+\varrho(\pi(u_3, u_1))(u_2)+\varrho(\pi(u_2, u_3))(u_1)=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (u_1, u_2, u_3\in U), \end{cases}$$

$$(1.4)\qquad \begin{cases} [\pi(u_1, u_2), a]+\pi(\varrho(a)(u_1), u_2)+\pi(u_1, \varrho(a)(u_2))=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (u_1, u_2\in U,\ a\in M). \end{cases}$$

Réciproquement, soient M une algèbre de Lie, U un espace vectoriel, $\varrho : M\to E(U)$ une représentation linéaire de M et $\pi : U\times U\to M$ une fonction bilinéaire antisymétrique satisfaisant aux relations (1, 3) et (1, 4). Alors, la structure d'algèbre de Lie de M peut être étendue à l'espace vectoriel L, somme directe de M et U, par l'introduction des crochets

$$\begin{aligned} [a, u]&=\varrho(a)(u) && (a\in M,\ u\in U)\\ [u_1, u_2]&=\pi(u_1, u_2) && (u_1, u_2\in U). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas particulier de la situation précédente où $M=N\dotplus E^\circ(V_2)$ est la somme directe d'une algèbre N et de l'algèbre $E^\circ(V_2)$ des endomorphismes de trace nulle d'un espace vectoriel V_2 à deux dimensions sur K, et où $\varrho=\tau\otimes\iota$ est la somme tensorielle [1]) d'une représentation $\tau : N \to E(W)$ de N et de la représentation "naturelle" (i.e. l'inclusion) $\iota : E^\circ(V_2) \to E(V_2)$. Lorsque ces conditions sont remplies, nous dirons que la relation

$$L = (N \dotplus E^\circ(V_2)) + W \otimes V_2, \tag{1.5}$$

constitue une *Λ-décomposition de L*. L'algèbre L est alors entièrement déterminée par la représentation τ et la fonction π, que nous dirons *caractéristiques* de la Λ-décomposition. Le théorème 2.1 ci dessous montre que l'existence d'une Λ-décomposition n'est pas une circonstance aussi exceptionnelle qu'il peut paraître à première vue.

2. Théorème 2.1. *Toute algèbre de Lie semi-simple complexe* [2]) *L possède (au moins) une Λ-décomposition* (1.5) *où N est une algèbre réductive.*

Notons tout d'abord que si $L = L_1 \dotplus L_2$ et si $L_1 = M_1 + U_1$ est une Λ-décomposition de L_1, $L = (M_1 \dotplus L_2) + U_1$ est une Λ-décomposition de L. On peut donc se borner à considérer le cas où L est simple.

Soient H une sous-algèbre de Cartan de L, $L = H + \Sigma_\alpha X_\alpha$ la décomposition canonique de L relative à H, la somme Σ_α étant étendue à toutes les racines α de L, (,) la forme bilinéaire de Killing–Cartan, et μ une racine de L telle que $(\mu, \mu) \geqslant (\alpha, \alpha)$ pour toute racine α [3]) (les racines étant considérées ici comme des éléments de H). Il résulte des propriétés fondamentales des racines qu'on a alors, pour toute racine $\alpha \neq \pm \mu$,

$$\frac{(\alpha, \mu)}{(\mu, \mu)} = 0 \text{ ou } \pm \tfrac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Désignons respectivement par Σ°, Σ^+, Σ^- l'ensemble des racines α telles que l'expression (2,2) soit égale à 0, à $+\frac{1}{2}$, à $-\frac{1}{2}$, et soient H_μ l'espace des $h \in H$ tels que $(h, \mu) = 0$, N l'algèbre engendrée (linéairement) par H_μ et par les X_α correspondant aux $\alpha \in \Sigma^\circ$, $P \cong E^\circ(V_2)$ l'algèbre engendrée par μ, X_μ et $X_{-\mu}$, et U l'espace vectoriel engendré par les X_α correspondant aux $\alpha \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$. Il est immédiat que la décomposition $L = (N \dotplus P) + U$ est une Λ-décomposition de L. Le théorème est ainsi démontré.

3. Les notations restant celles de la démonstration précédente, nous allons montrer que la structure de l'algèbre N et la nature de la représentation τ se déduisent immédiatement du schéma de Dynkin $\Delta^\mu(L)$

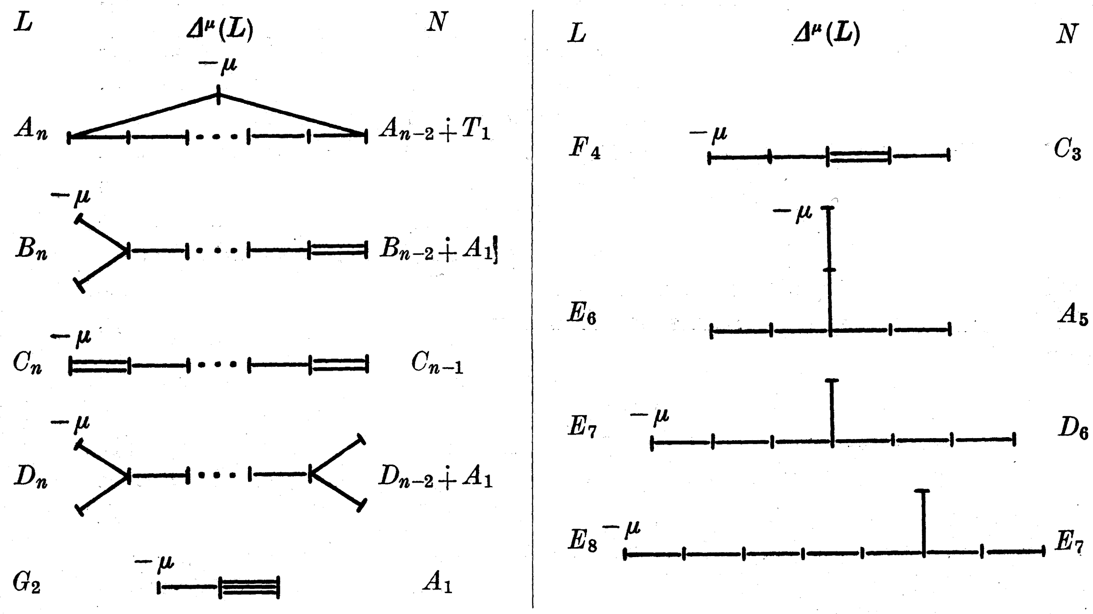
---

[1]) Pour la terminologie utilisée, cf. par exemple C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, Tome III, Actu. Sci. et Ind. no. 1226, Hermann, Paris, 1955.

[2]) Le théorème reste valable pour les algèbres des types classiques et exceptionnels sur un corps algébriquement clos quelconque, sauf peut-être en caractéristique 2 et 3.

[3]) Deux racines μ quelconques jouissant de cette propriété peuvent toujours être transformées l'une en l'autre par une opération du groupe de Weyl de L (cf. C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J. 7 (1955), 14–66. Lemme 5, p. 21). Il s'ensuit que la Λ-décomposition que nous décrivons ne dépend pas à un automorphisme intérieur de L près, de la racine μ choisie.

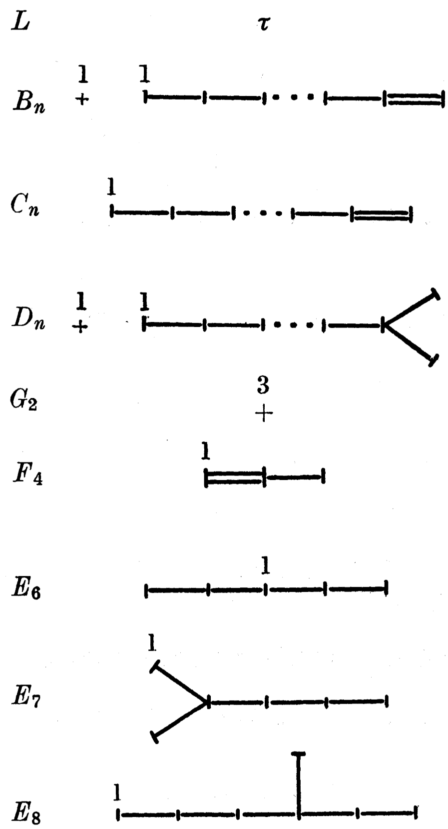
des racines simples et de la racine minimum de L [4]). A cet effet, introduisons dans l'espace vectoriel H^* des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des racines une relation d'ordre telle que μ soit supérieur à tout élément de $H^* \cap H^\mu$, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ les racines simples (relatives à cette relation d'ordre) orthogonales à μ, et $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ les autres racines simples. N est alors le produit d'une algèbre semi-simple de rang s ayant pour racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ et d'une algèbre commutative T_{r-s-1} de dimension $r-s-1$. Mais il résulte des conditions imposées à μ et à la relation d'ordre, que μ est la racine dominante de L, donc que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ correspondent aux sommets de $\Delta^\mu(L)$ qui ne sont pas directement reliés au sommet de ce schéma représentant $-\mu$. Il s'ensuit que N a, pour les différents types d'algèbres simples L, la structure indiquée dans le tableau suivant:



Désignons par U^- l'espace vectoriel engendré par les X_α correspondant aux racines $\alpha \in \Sigma^-$. La représentation τ de N, dont il est question au $n°$ précédent, est canoniquement équivalente à la représentation $\mathrm{ad}_{U^-} : N \to E(U^-)$, où $\mathrm{ad}_{U^-}\, a$ représente, pour tout $a \in N$, l'endomorphisme de U^- induit par ad a. Supposons que L ne soit pas du type A_n. N est alors semi-simple et les poids de la représentation $\tau \simeq \mathrm{ad}_{U^-}$ (relatifs à la sous-algèbre de Cartan H_μ de N) ne sont autres que les restrictions à H_μ des racines $\alpha \in \Sigma^-$, considérées cette fois comme des formes linéaires sur H. Σ° contenant toutes les racines simples sauf une, α_r, toute racine α appartement à Σ^- et distincte de $-\alpha_r$ est la somme de deux racines négatives dont l'une appartient à Σ^- tandis que l'autre appartient à Σ°

[4]) Cf. p. ex. E. B. Dynkin, Sous-algèbres semi-simples des algèbres de Lie semi-simples, Mat. Sbornik. N. S. 30 (72) (1952), 349–462 (ou aussi A.M.S. Translations, ser. 2, vol. 6, 1957).

et est donc une racine de N. Il s'ensuit que τ est la représentation irréductible de N ayant pour poids dominant la restriction de $-\alpha_r$ à H_μ. Dans le tableau suivant, nous donnons le schéma de cette représentation dans les divers cas [5]).



Lorsque $L = A_n$, un raisonnement analogue au précédent montre que τ correspond au schéma suivant

$\tau_0 \otimes$ 

$+ \ (-\tau_0) \otimes$ 

,

où τ_0 désigne une représentation non nulle de dimension 1 du facteur T_1 de N, et où le signe $+$ représente une somme cartésienne.

4. *K sera à présent un corps quelconque de caractéristique différente de* 2. Soit L une algèbre de Lie sur K possédant une Δ-décomposition (1.5). La fonction caractéristique, $\pi : (W \otimes V_2) \times (W \otimes V_2) \to N \dot{+} E^\circ(V_2)$ est une fonction bilinéaire antisymétrique sur $W \otimes V_2$, à valeurs dans $N \dot{+} E^\circ(V_2)$. Nous nous proposons de montrer que *la donnée de π peut être remplacée par la donnée de deux fonctions bilinéaires sur W, à savoir, une forme bilinéaire antisymétrique, $\chi : W \times W \to K$, et une fonction bilinéaire*

---

[5]) Avec les notations de E. B. Dynkin (loc. cit.).

symétrique à valeurs dans N, $\varphi : W \times W \to N$, *vérifiant certaines identités* (identités (4.7), (4.8) et (4.9) ci-dessous).

Choisissons dans V_2 une base (v_1, v_2) et désignons par e_0, e_1, e_2 les éléments de $E^\circ(V_2)$ représentés dans cette base par les matrices suivantes:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

ces éléments constituent une base de $E^\circ(V_2)$. Un élément quelconque u de $U = W \otimes V_2$ peut s'écrire sous la forme

$$u = x_1 \otimes v_1 + x_2 \otimes v_2, \quad \text{avec} \quad x_1, x_2 \in W.$$

Posons

$$\pi(x_1 \otimes v_1, x_2 \otimes v_2) = \varphi(x_1, x_2) + \chi(x_1, x_2) \cdot e_0 + \eta(x_1, x_2) \cdot e_1 + \xi(x_1, x_2) \cdot e_2,$$

avec

$$\varphi(x_1, x_2) \in N \text{ et } \chi(x_1, x_2), \eta(x_1, x_2), \xi(x_1, x_2) \in K.$$

Remarquons immédiatement qu'on doit avoir identiquement

$$\eta(x_1, x_2) = \xi(x_1, x_2) = 0,$$

ainsi qu'il résulte de la relation (1.4) où on pose $u_1 = x_1 \otimes v_1$, $u_2 = x_2 \otimes v_2$ et $a = e_0$. Par conséquent,

$$\pi(x_1 \otimes v_1, x_2 \otimes v_2) = \varphi(x_1, x_2) + \chi(x_1, x_2) \cdot e_0. \tag{4.1}$$

En désignant par x_1, x_2, y, y_1, y_2 des éléments quelconques de W, on déduit alors:

de (1.4), en posant $u_1 = x_1 \otimes v_1$, $u_2 = x_2 \otimes v_2$ et $a =$ successivement e_1 et e_2,

$$\pi(x_1 \otimes v_1, x_2 \otimes v_1) + 2\chi(x_1, x_2) \cdot e_1 = 0 \tag{4.2}$$

et

$$\pi(x_1 \otimes v_2, x_2 \otimes v_2) - 2\chi(x_1, x_2) \cdot e_2 = 0; \tag{4.3}$$

de (1.2) et par exemple (4.2),

$$\chi(x_1, x_2) = -\chi(x_2, x_1); \tag{4.4}$$

de (4.1), (4.2), (4.3) et (1.2),

$$\left\{ \begin{aligned} &\pi(x_1 \otimes v_1 + x_2 \otimes v_2, y_1 \otimes v_1 + y_2 \otimes v_2) = \\ &\varphi(x_1, y_2) - \varphi(y_1, x_2) + (\chi(x_1, y_2) - \chi(y_1, x_2)) \cdot e_0 - \\ &- 2\chi(x_1, y_1) \cdot e_1 + 2\chi(x_2, y_2) \cdot e_2; \end{aligned} \right. \tag{4.5}$$

de (1.4), en posant $u_1 = x_1 \otimes v_1$, $u_2 = x_2 \otimes v_1$ et $a = e_2$,

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, x_1); \tag{4.6}$$

de (1.4), en posant $u_1 = x_1 \otimes v_1$, $u_2 = x_2 \otimes v_2$ et $a \in N$,

$$[\varphi(x_1, x_2), a] + \varphi(\tau(a)(x_1), x_2) + \varphi(x_1, \tau(a)(x_2)) = 0, \tag{4.7}$$

et

$$\chi(\tau(a)(x_1), x_2) + \chi(x_1, \tau(a)(x_2)) = 0; \tag{4.8}$$

et enfin de (1.3), en posant $u_1 = x_1 \otimes v_1$, $u_2 = x_2 \otimes v_1$ et $u_3 = y \otimes v_2$,

$$\left\{ \begin{aligned} &\tau(\varphi(x_1, y))(x_2) - \tau(\varphi(x_2, y))(x_1) = \\ &\chi(x_2, y) \cdot x_1 - \chi(x_1, y) \cdot x_2 - 2\chi(x_1, x_2) \cdot y. \end{aligned} \right. \tag{4.9}$$

Réciproquement, soient N une algèbre de Lie, $\tau : N \to E(W)$ une représentation linéaire de N, $\chi : W \times W \to K$ une forme bilinéaire antisymétrique et $\varphi : W \times W \to N$ une fonction bilinéaire symétrique vérifiant les relations (4.7), (4.8) et (4.9). Alors, la représentation

$$\varrho = \tau \otimes \iota : N \dotplus E^\circ(V_2) \to E(W \otimes V_2)$$

et la fonction

$$\pi : (W \otimes V_2) \times (W \otimes V_2) \to N \dotplus E^\circ(V_2)$$

définie par (4.5) vérifient les relations (1.2), (1.3) et (1.4). Cela résulte d'un calcul élémentaire que nous n'expliciterons pas. Notons seulement qu'on peut se borner, pour ce calcul, à considérer le cas où, dans les trois relations envisagées, u_1 est de la forme $x_1 \otimes v_1$; on observera en effet que la substitution suivante

$$e_0 \to -e_0, \quad e_1 \to -e_2, \quad e_2 \to -e_1, \quad v_1 \to v_2, \quad v_2 \to -v_1,$$

laisse invariantes toutes les données du problème. Remarquons aussi que cette réciproque reste évidemment valable en caractéristique 2.

L, N, τ, χ et φ étant définis comme ci-dessus, nous écrirons

$$L = \Lambda(N, \tau, \chi, \varphi).$$

Nous appellerons *Λ-système*, toute collection N, τ, χ, φ formée d'une algèbre de Lie N, d'une représentation linéaire $\tau : N \to E(W)$ de N, d'une forme bilinéaire antisymétrique $\chi : W \times W \to K$ et d'une fonction bilinéaire symétrique $\varphi : W \times W \to W$ vérifiant les relations (4.7), (4.8) et (4.9). Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 4.10. *A tout Λ-système* (N, τ, χ, φ) *sont associées une algèbre de Lie* $L = \Lambda(N, \tau, \chi, \varphi)$ *et une Λ-décomposition* (1.5) *de* L, *dont la fonction caractéristique est donnée par* (4.5). *Réciproquement, si* K *n'est pas de caractéristique* 2, *toute Λ-décomposition d'une algèbre de Lie* L *est associée de cette façon à un Λ-système.*

Dans une prochaine note, nous utiliserons ce dernier résultat pour construire une classe d'algèbres de Lie de type E_6 en correspondance avec les algèbres à division de degré 3.